TITLE:

バナッハ空間上の写像列に関する収束定理と係数条件 (バナッハ空間及び関数空間論の最近の進展とその応用)

AUTHOR(S):

木村, 泰紀

CITATION:

木村, 泰紀. バナッハ空間上の写像列に関する収束定理と係数条件 (バナッハ空間及び関数空間論の最近の進展とその応用). 数理解析研究所講究録 2008, 1615: 165-174

ISSUE DATE:

2008-10

URL:

http://hdl.handle.net/2433/140120

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
第 1615 巻 2008 年 165-174

バナッハ空間上の写像列に関する収束定理と係数条件

東京工業大学・大学院情報理工学研究科 木村泰紀 (Yasunori Kimura)
Department of Mathematical and Computing Sciences
Tokyo Institute of Technology

1 はじめに

実 Banach 空間 E 上で定義された増大作用素を A に対し, $0 \in Az$ をみたす $z \in E$ を求める問題を考えよう. 解 z の近似列を求める方法で有名なものの一つとして近接点法と呼ばれる次の方法が挙げられる. これは与えられた初期点 $x_1 \in E$ に対して, 漸化式

$$x_{n+1} = (I + \rho_n A)^{-1} x_n$$

によって点列を構成することによって近似列を生成する方法である. 近接点法に関する結果としては, Hilbert 空間における代表的なものは Rockafellar [14], Brézis-Lions [1], Pazy [10], Eckstein-Bertsekas [3], Kamimura-Takahashi [5] 等が挙げられる. 一方, Banach 空間における代表的な結果としては Bruck-Reich [2], Nevanlinna-Reich [9], Reich [12], Jung-Takahashi [4], Reich-Zaslavski [13] 等がある.

近年, [8] で得られた近接点法に関する結果は Kamimura-Takahashi [6] の結果の拡張であったが, さらに係数の条件をゆるめた結果が [7] によって与えられている. 本稿はこの定理に注目し, 証明の詳細について述べることを目的とする. 証明の本質的な部分は変わらないが, 与えられている証明の一部を簡潔にし, 省略されている部分については補うことで, さらに理解しやすい証明に書き直すことを目指した.

Key words and phrases. accretive operator, resolvent, m-accretive operator, proximal point algorithm, iterative scheme, weak convergnece
2000 *Mathematics Subject Classification.* 47H06, 47J25

2 準備

本稿であつかう空間は実 Banach 空間である．実 Banach 空間 E に対し，その共役空間を E^* であらわす．$x \in E$ のノルムを $\|x\|$ であらわし，$x^* \in E^*$ の x での値を $\langle x, x^* \rangle$ であらわす．

Banach 空間 E に対して，関数 $\delta_E : [0,2] \to [0,1]$ を次のように定義する．各 $\epsilon \in [0,2]$ に対して

$$\delta_E(\epsilon) = \inf\{1 - \|x+y\|/2 : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, \|x-y\| \geq \epsilon\}$$

とする．この δ_E は，空間 E の凸性のモジュラスと呼ばれ，$[0,2[$ で連続な関数であることが知られている．E が一様凸であることは，任意の $\epsilon > 0$ に対して $\delta_E(\epsilon) > 0$ が成り立つことと同値である．δ_E の定義より任意の $\epsilon \geq 0$, $\rho > 0$ と任意の $\|x\| \leq \rho$, $\|y\| \leq \rho$, および $\|x-y\| \geq \epsilon$ をみたす $x, y \in E$ に対して

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq \rho \left(1 - \delta_E \left(\frac{\epsilon}{\rho} \right) \right)$$

が成り立つ．また，一様凸な Banach 空間は回帰的であることが知られている．

$B = \{x \in E : \|x\| = 1\}$ とする．$B \times B \times \mathbb{R} \backslash \{0\}$ 上の関数 $f(x,y,t) = (\|x+ty\| - \|x\|)/t$ に対し，極限 $\lim_{t \to 0} f(x,y,t)$ が $x \in B$ に関して一様に収束するとき，E は Fréchet 微分可能なノルムをもつという．

E から E への多価写像 A を $A : E \rightrightarrows E$ とあらわすことにする．$A : E \rightrightarrows E$ が増大作用素であるとは任意の $\lambda > 0$ と $y_1 \in Ax_1$ および $y_2 \in Ax_2$ をみたす $x_1, x_2, y_1, y_2 \in E$ に対して $\|x_1 - x_2\| \leq \|(x_1 - x_2) + \lambda(y_1 - y_2)\|$ が成り立つことをいう．また，増大作用素 A が任意の $\rho > 0$ に対して $\operatorname{ran}(I + \rho A) = E$ をみたすとき，A を m 増大作用素という．ここで I は E 上の恒等写像であり，$\operatorname{ran}(I+\rho A)$ は多価写像 $(I + \rho A)$ の値域である．

増大作用素 A と $\rho > 0$ に対し，任意の $x \in \operatorname{ran}(I + \rho A)$ に対して $(I+\rho A)^{-1}x$ は一点集合であることが知られている．よって $(I+\rho A)^{-1}$ は $\operatorname{ran}(I+\rho A)$ から E への一価写像であり，これを A のリゾルベントという．定義より $\operatorname{dom}(I+\rho A)^{-1} = \operatorname{ran}(I+\rho A)$ および $\operatorname{ran}(I+\rho A)^{-1} = \operatorname{dom} A$ が成り立つ．ただし $\operatorname{dom}(I+\rho A)^{-1}$ および $\operatorname{dom} A$ は各写像の定義域をあらわしている．したがって，A が m 増大作用素ならばそのリゾルベント $(I+\rho A)^{-1}$ は E から E への写像となる．また，$(I+\rho A)^{-1}$ は非拡大写像，すなわち

$$\left\|(I+\rho A)^{-1}x - (I+\rho A)^{-1}y\right\| \leq \|x-y\|$$

が任意の $x, y \in \mathrm{ran}(I+\rho A)$ で成り立つ写像であり, さらに $(I+\rho A)^{-1}$ の不動点は $A^{-1}0$ と一致することが知られている. 詳細は, 例えば [16] を参照せよ.

次に示す 2 つの補題は主定理の証明において重要な役割を果たす.

補題 1 (Suzuki-Takahashi [15]). 非負の実数列 $\{\lambda_n\}$ と $\{\mu_n\}$ が $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \infty$ および $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \mu_n < \infty$ をみたすとする. このとき, 任意の $\kappa > 0$ に対して自然数のある部分列 $I = \{n_i\} \subset \mathbb{N}$ が存在して, $\sum_{j \in \mathbb{N} \setminus I} \lambda_j \leq \kappa$ かつ $\lim_{i \to \infty} \mu_{n_i} = 0$ が成り立つ.

補題 2 (Reich [11]). Fréchet 可能なノルムをもつ一様凸な Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合を C とする. $\{T_n\}$ を C からそれ自身への非拡大写像の列で, 共通不動点をもつものとする. 写像 $\{S_n\}$ を各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $S_n = T_n T_{n-1} \cdots T_1$ で定義する. このとき, $x \in C$ に対して $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{clco}\{S_m x : m \geq n\} \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$ はたかだか 1 点からなる集合である.

3 主定理とその証明

本節では [7] で得られた次の定理に対して証明の詳細を示す. 示すべき命題を限定することによって, 証明はもとのものより簡潔になっている部分がある.

定理. E を Fréchet 微分可能なノルムをもつ一様凸 Banach 空間とする. $\{A_n\}$ を E 上の m 増大作用素の列で, $C_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^{-1} 0 \neq \emptyset$ とし, さらに

(WLS) 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $u_n \in A_n v_n$ をみたすような任意の点列 $\{u_n\}, \{v_n\} \subset E$ に対して, $\{u_n\}$ が 0 に強収束するならば, $\{v_n\}$ の任意の弱収束部分列の極限は C_0 に属する

と仮定する. $\{\alpha_n\} \subset [0, 1[$ を用いて生成される点列

$$
\begin{aligned}
&x_1 \in E, \\
&x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)(I + A_n)^{-1} x_n + e_n
\end{aligned}
$$

を考える. ここで $\{e_n\} \subset E$ は $\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n\| < \infty$ をみたす点列である. このときもし

$$
\sum_{n=1}^{\infty} (1-\alpha_n) = \infty
$$

であるならば, $\{x_n\}$ は C_0 のある点に弱収束する.

証明. 最初に $\{e_n\}$ が恒等的に 0 の場合, すなわち $\{x_n\}$ が

$$\begin{aligned} &x_1 \in E, \\ &x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) J_n x_n \end{aligned}$$

で定義される場合を考える. ただし $J_n = (I + A_n)^{-1}$ である. $z \in C_0$ を任意にとると, $z \in A_n^{-1}0$ より $z = J_n z$ が任意の $n \in \mathbb{N}$ で成り立つので,

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - z\| &= \|\alpha_n x_n + (1-\alpha_n) J_n x_n - z\| \\ &\leq \alpha_n \|x_n - z\| + (1-\alpha_n) \|J_n x_n - z\| \\ &\leq \alpha_n \|x_n - z\| + (1-\alpha_n) \|x_n - z\| \\ &= \|x_n - z\| . \end{aligned}$$

したがって, $\{\|x_n - z\|\}$ は非負の減少列であり, $\lim_{n\to\infty} \|x_n - z\| = c$ が存在する. このことから $\{x_n\}$ が有界であることがわかり, さらに $\|J_n x_n - z\| \leq \|x_n - z\|$ から $\{J_n x_n\}$ も有界であることがわかる. ここで $c = 0$ のときは $\{x_n\}$ は z に強収束することとなり, 定理は証明されたことになる. よって, 以降では $c > 0$ を仮定する.

数列 $\{\|x_n - z\|\}$ は減少列であることから $\{\|x_n - z\|\}$ は正の実数列である. $0 \in A_n z$ であることと, J_n の定義から $x_n - J_n x_n \in A_n J_n x_n$ が成り立つことを用いて,

$$\begin{aligned} \|J_n x_n - z\| &\leq \left\| J_n x_n - z + \frac{1}{2}(x_n - J_n x_n - 0) \right\| \\ &= \frac{1}{2} \|(x_n - z) + (J_n x_n - z)\| \\ &\leq \|x_n - z\| \left(1 - \delta_E \left(\frac{\|x_n - J_n x_n\|}{\|x_n - z\|} \right) \right) \\ &= \|x_n - z\| - \|x_n - z\| \, \delta_E \left(\frac{\|x_n - J_n x_n\|}{\|x_n - z\|} \right) \end{aligned}$$

が得られ, さらに

$$\begin{aligned} \|x_n - z\| - \|x_{n+1} - z\| &\geq \|x_n - z\| - \alpha_n \|x_n - z\| - (1-\alpha_n) \|J_n x_n - z\| \\ &= (1-\alpha_n)(\|x_n - z\| - \|J_n x_n - z\|) \\ &\geq (1-\alpha_n) \|x_n - z\| \, \delta_E \left(\frac{\|x_n - J_n x_n\|}{\|x_n - z\|} \right) \end{aligned}$$

を得る. よって

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1-\alpha_n) \|x_n - z\| \, \delta_E \left(\frac{\|x_n - J_n x_n\|}{\|x_n - z\|} \right) \leq \|x_1 - z\| - c < \infty.$$

補題 1 より, 自然数のある部分列 $I = \{n_i\} \subset \mathbb{N}$ が存在して

$$\sum_{j \in \mathbb{N} \setminus I} (1 - \alpha_j) \leq 1 < \infty \text{ かつ } \lim_{i \to \infty} \|x_{n_i} - z\| \, \delta_E \left(\frac{\|x_{n_i} - J_{n_i} x_{n_i}\|}{\|x_{n_i} - z\|} \right) = 0$$

が成り立つ. ここで $c > 0$ であることと空間の一様凸性を用いると,

$$\lim_{i \to \infty} \|x_{n_i} - J_{n_i} x_{n_i}\| = 0$$

であることがわかる. 実際, そうでないと仮定すると, $\{x_{n_i} - J_{n_i} x_{n_i}\}$ の部分列 $\{w_j\}$ $\{x_{n_{i_j}} - J_{n_{i_j}} x_{n_{i_j}}\}$ が存在して

$$\lim_{j \to \infty} \left\| x_{n_{i_j}} - J_{n_{i_j}} x_{n_{i_j}} \right\| = b > 0$$

をみたすが, このとき

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{j \to \infty} \left\| x_{n_{i_j}} - z \right\| \delta_E \left(\frac{\left\| x_{n_{i_j}} - J_{n_{i_j}} x_{n_{i_j}} \right\|}{\left\| x_{n_{i_j}} - z \right\|} \right) \\
&= \lim_{j \to \infty} \left\| x_{n_{i_j}} - z \right\| \lim_{j \to \infty} \delta_E \left(\frac{\left\| x_{n_{i_j}} - J_{n_{i_j}} x_{n_{i_j}} \right\|}{\left\| x_{n_{i_j}} - z \right\|} \right) \\
&= c \delta_E \left(\frac{\lim_{j \to \infty} \left\| x_{n_{i_j}} - J_{n_{i_j}} x_{n_{i_j}} \right\|}{\lim_{j \to \infty} \left\| x_{n_{i_j}} - z \right\|} \right) \\
&= c \delta_E \left(\frac{b}{c} \right)
\end{aligned}$$

となり, $\delta_E(b/c) = 0$ を得る. ここで空間の一様凸性から, $b/c = 0$, すなわち $b = 0$ が導かれ, 矛盾を得る. したがって $\{\|x_{n_i} - J_{n_i} x_{n_i}\|\}$ は 0 に収束する.

ここで点列 $\{u_n\}, \{v_n\}$ をそれぞれ

$$u_n = \begin{cases} x_{n_i} - J_{n_i} x_{n_i}, & (n = n_i \text{ をみたす } i \in \mathbb{N} \text{ が存在}) \\ 0, & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

$$v_n = \begin{cases} J_{n_i} x_{n_i}, & (n = n_i \text{ をみたす } i \in \mathbb{N} \text{ が存在}) \\ z & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

と定義すると, $0 \in A_n z$ および $x_n - J_n x_n \in A_n J_n x_n$ が任意の $n \in \mathbb{N}$ で成り立つことから, $u_n \in A_n v_n$ が任意の $n \in \mathbb{N}$ で成り立ち, さらに $\{u_n\}$ は 0 に強収束することもわ

かる．$\{x_{n_{i_j}}\}$ を $\{x_{n_i}\}$ の任意の弱収束する部分列とし，y をその弱極限としよう．すると，$\lim_{i\to\infty}\|x_{n_i}-J_{n_i}x_{n_i}\|=0$ であることから，$\{J_{n_{i_j}}x_{n_{i_j}}\}$ も同様に y に弱収束する．$\{J_{n_{i_j}}x_{n_{i_j}}\}$ は $\{v_n\}$ の部分列であるから，条件 (WLS) から $y\in C_0$ が得られる．

写像列 $\{T_n\}$ を，恒等写像 I と $\{J_n\}$ を用いて，各 $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$T_n=\alpha_n+(1-\alpha_n)J_n$$

とし，さらに写像列 $\{S_i\}$ を

$$S_i=T_{n_{i+1}-1}T_{n_{i+1}-2}\cdots T_{n_i}$$

と定義しよう．このとき $\{S_i\}$ は非拡大写像の列であり，

$$x_{n_{i+1}}=S_ix_{n_i}=S_iS_{i-1}\cdots S_2S_1S_0x_0$$

とあらわすことができる．ただし，

$$S_0=T_{n_1-1}\cdots T_2T_1$$

である．ここで，有界点列 $\{x_{n_i}\}$ の部分列の弱極限はすべて C_0 に属し，さらに補題 2 よりそれは唯一であることが示される．これは，$\{x_{n_i}\}$ が C_0 の点 x_0 に弱収束することをあらわしている．

さて，$m,l\in\mathbb{N}$ が $n_{m-1}<l\le n_m$ をみたすとしよう．$n_{m-1}<l<n_m$ のときは

$$\begin{aligned}
x_{n_m}&=\alpha_{n_m-1}x_{n_m-1}+(1-\alpha_{n_m-1})J_{n_m-1}x_{n_m-1}\\
&=x_{n_m-1}+(1-\alpha_{n_m-1})(J_{n_m-1}x_{n_m-1}-x_{n_m-1})\\
&=x_{n_m-2}\\
&\quad+(1-\alpha_{n_m-2})(J_{n_m-2}x_{n_m-2}-x_{n_m-2})\\
&\quad+(1-\alpha_{n_m-1})(J_{n_m-1}x_{n_m-1}-x_{n_m-1})\\
&=\cdots\\
&=x_l+\sum_{k=l}^{n_m-1}(1-\alpha_k)(J_kx_k-x_k)
\end{aligned}$$

が成り立つ．$\{x_n\}$ と $\{J_nx_n\}$ はともに有界だったから，$\{\|J_nx_n-x_n\|\}$ も有界である．よって $\kappa=\sup_{n\in\mathbb{N}}\|J_nx_n-x_n\|$ とすると

$$\|x_{n_m}-x_l\|\le\sum_{k=l}^{n_m-1}(1-\alpha_k)\|J_kx_k-x_k\|$$

$$
\begin{aligned}
&\le \sum_{k=n_m+1}^{n_m-1} (1-\alpha_k)\,\|J_k x_k - x_k\| \\
&\le \sum_{k=n_m+1}^{n_m-1} (1-\alpha_k)\kappa
\end{aligned}
$$

が得られる．ここで $d_m = \sum_{k=n_m+1}^{n_m-1}(1-\alpha_k)\kappa$ とすると，$n_{m-1} < l \le n_m$ に対して $\|x_{n_m} - x_l\| \le d_m$ が成り立ち，さらに

$$
\sum_{m=1}^{\infty} d_m = \sum_{j\in\mathbb{N}\setminus I} (1-\alpha_j)\kappa < \infty
$$

であることから $\lim_{m\to\infty} d_m = 0$ が導かれる．

$f^* \in E^*$ と $\epsilon > 0$ を任意に取ろう．$\{x_{n_m}\}$ は $x_0 \in C_0$ に弱収束するので，ある $m_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$
|\langle x_{n_m} - x_0, f^*\rangle| < \frac{\epsilon}{2} \text{ かつ } 0 \le d_m \|f^*\| < \frac{\epsilon}{2}
$$

が任意の $m > m_0$ で成り立つ．さらに，任意の $l > n_{m_0}$ に対して，ある $m_1 \in \mathbb{N}$ が存在して，$m_0 < m_1$ かつ $n_{m_1-1} < l \le n_{m_1}$ をみたす．このとき

$$
\begin{aligned}
|\langle x_l - x_0, f^*\rangle| &\le \left|\langle x_l - x_{n_{m_1}}, f^*\rangle\right| + \left|\langle x_{n_{m_1}} - x_0, f^*\rangle\right| \\
&\le \left\|x_l - x_{n_{m_1}}\right\| \|f^*\| + \frac{\epsilon}{2} \\
&< d_{m_1} \|f^*\| + \frac{\epsilon}{2} \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon
\end{aligned}
$$

となる．$\epsilon > 0$ と $f^* \in E^*$ は任意であったので，このことから $\{x_n\}$ が $x_0 \in C_0$ に弱収束することが示された．

次に一般の場合，すなわち $\{x_n\}$ が

$$
\begin{aligned}
&x_1 \in E, \\
&x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) J_n x_n + e_n = T_n x_n + e_n
\end{aligned}
$$

で定義されている場合を考える．この場合の証明は [1] の方法をもとにしている．[6] も参照せよ．$m, n \in \mathbb{N}$ に対し，2 つの添字をもつ点列 $\{y_n^m\}$ を

$$
\begin{aligned}
y_0^m &= x_m, \\
y_n^m &= T_{m+n-1} T_{m+n-2} \cdots T_m x_m
\end{aligned}
$$

で定義する．このとき，上で示したことより $\{y_n^m\}$ は $n \to \infty$ とするときある $y^m \in C_0$ に弱収束する．また，$m, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}
\left\|y_n^{m+1} - y_{n+1}^m\right\| &= \|T_{m+n}T_{m+n-1}\cdots T_{m+1}x_{m+1} - T_{m+n}T_{m+n-1}\cdots T_m x_m\| \\
&\le \|x_{m+1} - T_m x_m\| \\
&= \|T_m x_m + e_m - T_m x_m\| \\
&= \|e_m\|
\end{aligned}$$

が成り立ち，$n \to \infty$ とすると，$\left\|y^{m+1} - y^m\right\| \le \|e_m\|$ が任意の $m \in \mathbb{N}$ で成り立つことが得られる．仮定より $\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n\| < \infty$ であることから，$\{y^m\}$ はコーシー列である．E の完備性から $\{y^m\}$ は強収束し，その極限を y とすると，$\{y^m\}$ は閉集合 C_0 の点列なので y も C_0 に属する．任意に固定した $f^* \in E^*$ に対して，

$$\begin{aligned}
|\langle x_{m+n+1} - y, f^*\rangle| &= \left|\left\langle x_{m+n+1} - y_{n+1}^m, f^*\right\rangle + \left\langle y_{n+1}^m - y^m, f^*\right\rangle + \langle y^m - y, f^*\rangle\right| \\
&\le \left\|x_{m+n+1} - y_{n+1}^m\right\| \|f^*\| \\
&\quad + \left\|y_{n+1}^m - y^m\right\| \|f^*\| + \|y^m - y\| \|f^*\| \\
&= \|T_{m+n}x_{m+n} + e_{m+n} - T_{m+n}y_n^m\| \|f^*\| \\
&\quad + \left\|y_{n+1}^m - y^m\right\| \|f^*\| + \|y^m - y\| \|f^*\| \\
&\le (\|x_{m+n} - y_n^m\| + \|e_{m+n}\|) \|f^*\| \\
&\quad + \left\|y_{n+1}^m - y^m\right\| \|f^*\| + \|y^m - y\| \|f^*\| \\
&\le \left(\left\|x_{m+n-1} - y_{n-1}^m\right\| + \|e_{m+n-1}\| + \|e_{m+n}\|\right) \|f^*\| \\
&\quad + \left\|y_{n+1}^m - y^m\right\| \|f^*\| + \|y^m - y\| \|f^*\| \\
&\le \cdots \\
&\le \left(\|x_m - y_0^m\| + \sum_{k=m}^{m+n} \|e_k\|\right) \|f^*\| \\
&\quad + \left\|y_{n+1}^m - y^m\right\| \|f^*\| + \|y^m - y\| \|f^*\| \\
&= \sum_{k=m}^{m+n} \|e_k\| \|f^*\| + \left\|y_{n+1}^m - y^m\right\| \|f^*\| + \|y^m - y\| \|f^*\|
\end{aligned}$$

が任意の $m, n \in \mathbb{N}$ で成り立ち，$n \to \infty$ とすると

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} |\langle x_n - y, f^*\rangle| &= \limsup_{n\to\infty} |\langle x_{m+n+1} - y, f^*\rangle| \\
&\le \sum_{k=m}^{\infty} \|e_k\| \|f^*\| + \lim_{n\to\infty} \left\|y_{n+1}^m - y^m\right\| \|f^*\| + \|y^m - y\| \|f^*\| \\
&= \sum_{k=m}^{\infty} \|e_k\| \|f^*\| + \|y^m - y\| \|f^*\|
\end{aligned}$$

が任意の $m \in \mathbb{N}$ で成り立つ. ここで $m \to \infty$ とすると

$$\lim_{n\to\infty} |\langle x_n - y, f^* \rangle| = 0.$$

$f^* \in E^*$ は任意だったので, $\{x_n\}$ は $y \in C_0$ に弱収束することが示された. □

なお, [7] で既に示されているとおり, 空間のノルムの Fréchet 微分可能性の代わりに Opial 条件を仮定しても, 同様の結果が得られることがわかる.

参考文献

[1] H. Brézis and P.-L. Lions, *Produits infinis de résolvantes*, Israel J. Math. **29** (1978), 329–345.

[2] R. E. Bruck and S. Reich, *Nonexpansive projections and resolvents of accretive operators in Banach spaces*, Houston J. Math. **3** (1977), 459–470.

[3] J. Eckstein and D. P. Bertsekas, *On the Douglas-Rachford splitting method and the proximal point algorithm for maximal monotone operators*, Math. Programming **55** (1992), 293–318.

[4] J. S. Jung and W. Takahashi, *Dual convergence theorems for the infinite products of resolvents in Banach spaces*, Kodai Math. J. **14** (1991), 358–365.

[5] S. Kamimura and W. Takahashi, *Approximating solutions of maximal monotone operators in Hilbert spaces*, J. Approx. Theory **106** (2000), 226–240.

[6] ———, *Weak and strong convergence of solutions to accretive operator inclusions and applications*, Set-Valued Anal. **8** (2000), 361–374.

[7] Y. Kimura, *Weak convergence of an iterative scheme with a weaker coefficient condition*, Proceedings of the International Conference on Modeling, Computation and Optimization, to appear.

[8] Y. Kimura and W. Takahashi, *A generalized proximal point algorithm and implicit iterative schemes for a sequence of operators on Banach spaces*, Set-Valued Anal., to appear.

[9] O. Nevanlinna and S. Reich, *Strong convergence of contraction semigroups and of iterative methods for accretive operators in Banach spaces*, Israel J. Math. **32** (1979), 44–58.

[10] A. Pazy, *Remarks on nonlinear ergodic theory in Hilbert space*, Nonlinear Anal. **3** (1979), 863–871.

[11] S. Reich, *Weak convergence theorems for nonexpansive mappings in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **67** (1979), 274–276.

[12] ———, *Strong convergence theorems for resolvents of accretive operators in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **75** (1980), 287–292.

[13] S. Reich and A. J. Zaslavski, *Infinite products of resolvents of accretive operators*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **15** (2000), 153–168, Dedicated to Juliusz Schauder, 1899–1943.

[14] R. T. Rockafellar, *Monotone operators and the proximal point algorithm*, SIAM J. Control Optim. **14** (1976), 877–898.

[15] T. Suzuki and W. Takahashi, *On weak convergence to fixed points of nonexpansive mappings in Banach spaces*, Nonlinear analysis and convex analysis (Niigata, 1998), World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1999, pp. 341–347.

[16] W. Takahashi, *Nonlinear functional analysis: fixed point theory and its applications*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.